مطالعه‌ی راندمان اختلاط یک ریزمخلوط‌گر الکترواسمتیکی با توزیع ناهمگن بارهای دیواره*

محمد مهدی افسری(۱) سید علی میربزرگی(۲) حمید نیازمند(۳)

چکیده *در این مقاله یک ریزمخلوط‌گر غیرفعال الکترواسمتیکی با بار سطحی ناهمگن روی دیواره‌ی تخت و دوبعدی‌اش به روش عددی مورد بررسی قرار گرفته است. معادلات حاکم شامل یک معادله‌ی لاپلاس برای توزیع میدان الکتریکی خارجی، یک معادله‌ی پواسون برای توزیع میدان الکتریکی درون لایه‌ی دوگانه‌ی الکتریکی، معادله‌ی ارنست – پلانک برای توزیع غلظت یون‌های مثبت و منفی، معادله‌ی ناویر – استوکس اصلاح شده برای میدان جریان و معادله‌ی حاکم بر غلظت گونه‌ها برای یک جریان غیرقابل تراکم پایدار به روش حجم محدود حل شده است. اعتبارسنجی کد عددی نوشته شده با مقایسه‌ی نتایج حل جریان الکترواسمتیک ایده‌آل با زتاپتانسیل ثابت و حل تحلیلی موجود انجام شده است. نتایج نشان می‌دهد با توزیع مناسب بارهای ناهمگن سطحی می‌توان راندمان اختلاط را تغییر و کنترل نمود. بیشترین راندمان اختلاط مربوط به حالتی است که عدم تقارن در نحوه‌ی چینش بارهای ناهمگن دیواره افزایش یابد. هم‌چنین افزایش شدت بار الکتریکی با فرض ثابت بودن قدرت ریزپمپ الکترواسمتیکی، موجب افزایش راندمان اختلاط می‌شود.*

واژه‌های کلیدی اختلاط، ریزمخلوط‌گر غیرفعال، جریان الکترواسمیتک، توزیع بار ناهمگن.

Analysis of Mixing Efficiency in an Electroosmotically Micromixer with Heterogeneous Wall Charge Distribution

M.M. Afsari S.A. Mirbozorgi H. Niazmand

Abstract *In this paper, numerical investigation of a flat passive micromixer with heterogeneous surface properties that the flow through it, is driven by the electroosmotic flow have been presented. The governing equations, which consist of a Laplace equation for the distribution of external electric potential, a Poisson equation for the distribution of electric double layer potential, modified Navier-Stokes equations for the flow field, the Nernst-Planck equation for the distribution of ions concentration have been solved numerically for an incompressible steady flow of a Newtonian fluid using the finite-volume method. The key features of an ideal electro-osmotic flow with uniform zeta potential has been compared with analytical solutions for the ionic concentration and velocity fields for the validation of the numerical scheme. Results show that the arrangement of the heterogeneous surface properties has a significant impact on the efficiency of mixing. Maximum mixing efficiency is related to the condition that the asymmetry in the wall of the heterogeneous arrangement loads increase. The increase in intensity of the electric charge with constant power load of the electroosmotic micropump enhances the efficiency of mixing.*

Key Words Mixing, Passive micromixer, Electroosmotic flow, Patchy charge distribution

---

* تاریخ دریافت مقاله ۹۱/۱۲/۲۵ و تاریخ پذیرش آن ۹۲/۵/۲۳ می‌باشد.

(۱) کارشناسی ارشد مکانیک – تبدیل انرژی، دانشکده‌ی مهندسی، دانشگاه بیرجند.

(۲) نویسنده‌ی مسؤول: استادیار، گروه مکانیک، دانشکده‌ی مهندسی، دانشگاه بیرجند.

(۳) دانشیار، گروه مکانیک، دانشکده‌ی مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد.

مقدمه

جریان‌های الکترواسمتیک برای انتقال و اختلاط سیالات در سیستم‌های ریزسیالی (Microfluidic) که بعضاً پایه و اساس تراشه‌های آزمایشگاهی (Lab – on - chip) می‌باشند، به‌صورت گسترده مورد استفاده قرار گرفته‌اند. این‌گونه جریان‌ها در ریزمجراها عموماً در محدوده‌ی رژیم جریان آرام قرار می‌گیرند. به‌طور کلی نشان داده شده است که جریان‌های الکترواسمتیک به‌وسیله‌ی اعمال میدان الکتریکی خارجی بر لایه‌ی بارداری که توسط برهم‌کنش میان یون‌های موجود در محلول الکترولیت و بارهای ساکن روی دیواره‌ها شکل گرفته، ایجاد می‌شود. این لایه‌ی مجاور دیوار به‌همراه بارهای مخالف روی دیواره اصطلاحاً لایه‌ی دوگانه‌ی الکتریکی (Electric Debye Layer) نامیده می‌شود [1].

در بسیاری از کاربردهای سیستم‌های ریزسیالی اختلاط گونه‌ها از اهمیت بالایی برخوردار است. در این‌گونه سیستم‌ها استفاده از اجزای متحرک برای ایجاد اختلاط، بسیار دشوار است و از آن‌جایی که رژیم جریان در آن‌ها آرام است، ذاتاً هیچ‌گونه اغتشاشی که موجب برهم زدن سیال شود، وجود ندارد. بنابراین اختلاط گونه‌ها به‌کندی صورت می‌پذیرد [2].

به‌طور کلی ریزمخلوط‌گرها به دو گروه فعال (Active) و غیرفعال (Passive) تقسیم می‌شوند. در اختلاط فعال علاوه بر انرژی رانش سیال، برای ایجاد اختلاط از تجهیزات مکانیکی، ابزارهای الکترونیکی و ایجاد شیارها یا موانعی در سطح استفاده می‌شود. در اختلاط غیرفعال برای ایجاد اختلاط از روش‌هایی نظیر افزایش سطح تماس یا اعمال تغییرات در طرح جریان آرام استفاده می‌شود [3].

ریزمخلوط‌گرهای غیرفعال به دو گروه لایه‌لایه‌ساز (Lamination) و آشوبناک (Chaotic) تقسیم می‌شوند. در ریزمخلوط‌گرهای لایه‌لایه‌ساز اختلاط اساساً بر پخش مولکولی بین دو یا چند لایه جریان استوار است. معمول‌ترین نمونه‌های این‌گونه ریزمخلوط‌گرها دارای ورودی‌های T شکل [4] یا Y شکل [5] هستند به‌طوری که می‌توانند دو گونه‌ی متفاوت درون یک ریزمجرا تزریق و مخلوط نمایند. از طرف دیگر در ریزمخلوط‌گرهای آشوبناک اختلاط بر اساس تماس سطوح مشترک بین دو لایه جریان صورت می‌پذیرد. در این ریزمخلوط‌گرها طول پخش ملکولی به‌وسیله‌ی ایجاد آشوبناکی کاهش می‌یابد [3]. یکی از شیوه‌های ایجاد اختلاط آشوبناک استفاده از بارهای ناهمگن سطحی در جریان الکترواسمتیک می‌باشد. استفاده از این سطوح باردار ناهمگن امکان ایجاد جریان‌های چرخشی را که برای ایجاد اختلاط مناسب می‌باشند را می‌دهد. مطالعات تحلیلی [6,7] و تجربی [8] به‌خوبی نشان داد که استفاده از سطوح باردار ناهمگن موجب ایجاد چرخش در این‌گونه جریان‌ها می‌شود که با جای‌گذاری مناسب سطوح باردار در میدان جریان میزان راندمان اختلاط بهبود یافته است [9-11]. هم‌چنین با کنترل زمانی بارها در نواحی ناهمگن می‌توان میدان‌های الکتریکی عمود بر دیواره ایجاد کرد. این میدان‌ها می‌تواند به‌وسیله‌ی الکترودهای تعبیه شده در پشت فصل مشترک جامد- مایع تولید شوند [12].

در این پژوهش راندمان اختلاط یک ریزمخلوط‌گر الکترواسمتیکی با دیواره‌های تخت حاوی بار سطحی ناهمگن مورد مطالعه قرار گرفته است. ارزیابی میزان اختلاط درون ریزمجراها بر مبنای میانگین وزنی انحراف از معیار غلظت گونه‌ها با تابع وزن‌دهنده‌ی سرعت انجام شده است و بر پایه‌ی همین معیار چند ریزمخلوط‌گر غیرفعال مختلف مورد مطالعه قرار گرفته‌اند.

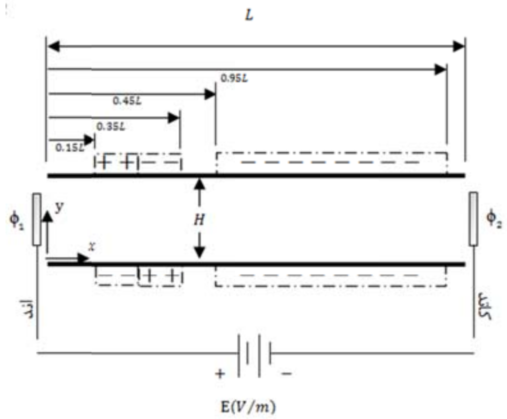
معرفی ریزمخلوط‌گر الکترواسمتیکی

مشخصات هندسی ریزمجرای به‌کار رفته در ریزمخلوط‌گر مورد نظر در شکل (۱) نشان داده شده است که در آن H ارتفاع ریزمجرای دوبعدی و L=10H

طول آن است. برای به حرکت درآوردن سیال در ریزمجرا، بخش پایانی به‌عنوان یک ریزپمپ الکترواسمتیک عمل می‌کند که طول آن 5H و ولتاژ دیواره‌ی آن برابر ($-\zeta_0$) است. دستگاه مختصات روی ابتدای صفحه‌ی پایینی نصب شده است و میدان الکتریکی خارجی توسط دو الکترود آند و کاتد مستقر در ابتدا و انتهای ریزمجرا اعمال شده است. برای ایجاد شرایط آشوبناک در جریان اصلی از بارهای ناهمگن تکه‌ای در فواصلی به طول H روی دیواره‌های ابتدایی ریزمجرا استفاده شده است. بارهای تکه‌ای در سه چیدمان و مقادیر گوناگون ولتاژ زتا مورد بررسی قرار گرفته‌اند. به‌عنوان نمونه چیدمان با علامت‌های ($+ -/- +$) نشان‌دهنده‌ی توزیع بارهای ناهمگن تکه‌ای روی دیواره‌ی بالایی از چپ به راست به‌صورت مثبت-منفی و در دیواره پایین به‌صورت منفی-مثبت، با ولتاژ (ζ_0) می‌باشند. دو آرایش دیگر که با همین چهار تکه بار ناهمگن می‌توانند شکل گیرد عبارتند از ($- + /- +$) و ($- -/+ +$). در حالتی که اندازه بارها یا به‌عبارت دیگر ولتاژ زتای آن‌ها متفاوت باشد وضعیت‌های بیشتری قابل طراحی است. به‌عنوان نمونه در حالت ($- -/2 + 2+$) روی دیواره‌ی بالایی دو بار تکه‌ای مثبت با ولتاژ دو زتا و در دیواره‌ی پایینی دو بار تکه‌ای منفی با ولتاژ زتا قرار گرفته است.

برای مدل‌سازی ریاضی این ریزمخلوط‌گر معادلات حاکم به شرح ذیل معرفی می‌گردند.

میدان الکتریکی. در جریان‌های الکترواسمتیک دو نوع میدان الکتریکی با توجه به منشأ آن‌ها قابل تشخیص است. نوع اول، میدان الکتریکی خارجی می‌باشد. این میدان توسط بارهای الکتریکی روی الکترودهای کاتد و آند تولید می‌شود. توزیع پتانسیل الکتریکی بین الکترودها در حالت دوبعدی با $\phi(x,y)$ بیان می‌شود و در نتیجه شدت میدان الکتریکی حاصل از این میدان برابر $-\nabla\phi$ و با دیمانسیون [V/m] می‌باشد. نوع دوم میدان الکتریکی ناشی از توزیع بار خالص الکتریکی در لایه‌ی دوگانه‌ی الکتریکی می‌باشد. توزیع پتانسیل الکتریکی ناشی از این میدان با $\psi(x,y)$ نشان داده می‌شود و قدرت میدان الکتریکی حاصل از آن برابر $-\nabla\psi$ است. میدان الکتریکی کلی از برهم‌نهی خطی این دو میدان الکتریکی به‌دست می‌آید.



شکل ۱ مشخصات هندسی جریان در ریزمخلوط‌گر غیرفعال با توزیع بارهای تکه‌ای

پتانسیل الکتریکی خارجی، ϕ. مطابق شکل (۱)، اعمال پتانسیل الکتریکی ثابت ϕ_1 و ϕ_2 به آند و کاتد موجب ایجاد میدان الکتریکی درون ریزمجرا می‌شود. توزیع این میدان از حل یک معادله‌ی لاپلاس به‌دست می‌آید.

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=0 \qquad (۱)$$

با معرفی $\bar{x}=x/D_h$، $\bar{y}=y/D_h$، $\bar{\phi}=\phi/E_{ref}D_h$ که $D_h=2H$ قطر هیدرولیکی ریزمجرا و $E_{ref}=(\phi_1-\phi_2)/L$ قدرت میدان الکتریکی مبنا می‌باشد، شکل بی‌بعد معادله‌ی (۱) پس از کنار گذاشتن بالانویس‌ها مشابه خودش به‌دست می‌آید.

شرایط مرزی به قرار زیر است:

$$\phi_{in}=\phi_1, \phi_{out}=\phi_2, \nabla\phi_{wall}=0 \qquad (۲)$$

پتانسیل الکتریکی درون لایه‌ی دوگانه‌ی الکتریکی، ψ. اثرات متقابل یون‌های محلول و بارهای ساکن روی سطوح دیوارها موجب ایجاد لایه‌ی دوگانه‌ی الکتریکی می‌شود. رابطه‌ی پتانسیل الکتریکی حاصل از توزیع یون‌ها در لایه‌ی دوگانه‌ی الکتریکی با چگالی خالص بار الکتریکی ρ_e، توسط یک معادله‌ی پواسون بیان می‌شود:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=-\frac{\rho_e}{\varepsilon_r\varepsilon_0} \qquad (۳)$$

که در این معادله، ε_r ثابت گذردهی الکترولیت و ε_0 گذردهی خلأ می‌باشد. برای یک الکترولیت متقارن عدد والانس (z) یون‌های مثبت و منفی برابر است و لذا چگالی بار الکتریکی خالص از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$\rho_e = ze(n^+ - n^-) \qquad (۴)$$

که n^+ و n^- به ترتیب، غلظت یون‌های مثبت و منفی و e بار الکترون است. شکل بی‌بعد معادلات (۴ و ۳) به‌کمک پارامترهای بی‌بعد $\bar{\psi} = \psi/(k_bT/ze)$، $(\bar{n})^+ = n^+/n_0$، $(\bar{n})^- = n^-/n_0$ و $\bar{\rho_e} = \rho_e/(zen_0)$ بعد از کنارگذاشتن بالانویس‌ها به‌صورت زیر حاصل می‌شود.

$$\rho_e = n^+ - n^- \qquad (۵)$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=\frac{-\kappa^2\rho_e}{2} \qquad (۶)$$

که در آن $n_0 = CN_A$ عدد غلظت توده‌ای یون‌ها در محلول الکترولیت، C غلظت مولی یون‌ها، N_A عدد آووگادرو، T دمای مطلق سیال و k_B ثابت بولتزمن می‌باشد. $\kappa = KD_h$ معرف پارامتر ضخامت لایه‌ی دوگانه‌ی الکتریکی می‌باشد که در آن $K = [2e^2z^2n_0/(\varepsilon_r\varepsilon_0k_bT)]$ پارامتر دیبای–هوکل می‌باشد و عکس ضخامت لایه‌ی دوگانه‌ی الکتریکی است. شرایط مرزی این معادله به قرار زیر است: روی دیواره‌ها در مکان‌هایی که بار تکه‌ای وجود دارد مقدار ψ برابر مقدار آن روی دیواره است و در مکان‌هایی که بار تکه‌ای وجود ندارد صفر است. در ورودی و خروجی $\partial\psi/\partial x = 0$ می‌باشد.

توزیع غلظت یونی. با توجه به معادله‌ی (۴)، برای به‌دست آوردن چگالی خالص بار الکتریکی (ρ_e) لازم است توزیع غلظت‌های یونی (n^- و n^+) مشخص شوند. این توزیع به‌کمک حل معادلات انتقال موسوم به معادله‌ی ارنست – پلانک (Nernst - Planck) حاصل می‌شود:

$$\frac{\partial(un^+)}{\partial x}+\frac{\partial(vn^+)}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(D^+\frac{\partial n^+}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(D^+\frac{\partial n^+}{\partial y}\right)$$
$$+\frac{\partial}{\partial y}\left[D^+n^+\left(\frac{ze}{k_bT}\right)\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}+\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)\right] \qquad (\text{۷–الف})$$
$$+\frac{\partial}{\partial y}\left[D^+n^+\left(\frac{ze}{k_bT}\right)\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}+\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)\right]$$

$$\frac{\partial(un^-)}{\partial x}+\frac{\partial(vn^-)}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(D^-\frac{\partial n^-}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(D^-\frac{\partial n^-}{\partial y}\right)$$
$$-\frac{\partial}{\partial x}\left[D^-n^-\left(\frac{ze}{k_bT}\right)\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\right] \qquad (\text{۷– ب})$$
$$-\frac{\partial}{\partial y}\left[D^-n^-\left(\frac{ze}{k_bT}\right)\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}+\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)\right]$$

که در آن u و v مؤلفه‌های سرعت در جهات x و y، D^+ و D^- ضریب پخش یون‌های مثبت و منفی می‌باشد. شکل بی‌بعد این معادلات به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\frac{\partial(un^+)}{\partial x}+\frac{\partial(vn^+)}{\partial y}=\frac{1}{ReSc^+}$$
$$\left\{\frac{\partial^2n^+}{\partial x^2}+\frac{\partial^2n^+}{\partial y^2}+\frac{\partial}{\partial x}\left[n^+\left(A\frac{\partial\phi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\right]\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial y}\left[n^+\left(A\frac{\partial\phi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\right]\right\} \qquad (\text{۸– الف})$$

$$\frac{\partial\left(un^-\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(vn^-\right)}{\partial y}=\frac{1}{ReSc^+}\{\frac{\partial^2 n^-}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 n^-}{\partial y^2}-\frac{\partial}{\partial x}\left[n^-\left(A\frac{\partial\phi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\right]-\frac{\partial}{\partial y}\left[n^-\left(A\frac{\partial\phi}{\partial y}+\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)\right]\} \quad (\text{۸- ب})$$

در ایـن معـادلات $Sc^{\pm}=\mu/\rho D^{\pm}$ عـدد اشـمیت (Schmidt Number) و $Re=\rho U_{ref}D_h/\mu$ عـدد رینولدز می‌باشـند کـه در آن $U_{ref}=-\varepsilon_r\varepsilon_0 E_{ref}\zeta_0/\mu$ سـرعت مشخصـه‌ی جریـان الکترواسـمتیک اسـت. ρ چگـالی سـیال، μ لزجـت دینـامیکی سـیال و $A=E_{ref}D_h/(k_bT/ze)$ پـارامتری بـی‌بعـد معـرف نسبت ولتاژ اعمالی خـارجی بـه ولتـاژ مبنـا در لایـه‌ی دوگانه‌ی الکتریکی می‌باشد. شرایط مرزی حاکم بر این معـادلات بـه قـرار زیـر مـی‌باشـند: در ورودی $n^+=n^-=1$، در خروجی $\partial n^+/\partial x=0$، $\partial n^-/\partial x=$ و روی دیـواره‌هـا تعـادل ترمودینـامیکی امکان استفاده از توزیع نمـایی بـولتزمن را بـه‌صـورت $n^+|_{wall}=\exp(-\zeta)$ و $n^-|_{wall}=\exp(\zeta)$ مقـدور می‌سازد.

معادلات اصلاح‌شـده‌ی نـاویر- اسـتوکس. نیـروی حجمی در جریان‌های الکترواسـمتیک ناشـی از اعمـال میدان الکتریکی خارجی بر بار خالص الکتریکی مجاور دیواره‌ها که به‌دلیل دیوارهای بـاردار درون الکترولیـت تشکیل شده‌اند، می‌باشد و این نیرو در معادلات ممنتوم به‌صورت یک نیروی حجمی لحاظ می‌گـردد. ازایـن‌رو معادلات ناویر – اسـتوکس اصـلاح شـده بـرای سـیال نیوتنی غیرقابل تراکم با خواص ثابت بـه‌صـورت زیـر می‌باشند:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \quad (\text{۹})$$

$$\frac{\partial(\rho uu)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho uv)}{\partial y}=-\frac{\partial P}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)-\rho_e\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) \quad (\text{۱۰- الف})$$

$$\frac{\partial(\rho uv)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho vv)}{\partial y}=-\frac{\partial P}{\partial y}+\mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)-\rho_e\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}+\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) \quad (\text{۱۰ – ب})$$

که P فشار و جملهٔ آخـر معـادلات (۱۰-الـف و ب) نیروی حجمی الکتریکی اعمال شده بر سیال می‌باشند.

شکل بی‌بعد معادلات ممنتوم به‌صورت زیر است:

$$\frac{\partial(uu)}{\partial x}+\frac{\partial(uv)}{\partial y}=-\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)-B\rho_e\left(A\frac{\partial\phi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) \quad (\text{۱۱- الف})$$

$$\frac{\partial(uv)}{\partial x}+\frac{\partial(vv)}{\partial y}=-\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)-B\rho_e\left(A\frac{\partial\phi}{\partial y}+\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) \quad (\text{۱۱ – ب})$$

کـه در آنهـا $B=n_0k_bT_0/\rho U_{ref}^2$ پـارامتر بـی‌بعـد بیان‌کننـده‌ی نسبت فشـار یـونی بـه فشـار دینـامیکی می‌باشد.

شرایط مرزی معادلات ناویر – استوکس به‌صورت زیر می‌باشد:

روی دیوارهـا بـا توجـه بـه شـرط عـدم لغـزش، سرعت‌ها صفر می‌باشند و گرادیـان عمـود بـر دیـواره فشـار صـفر اسـت. در ورودی و خروجـی $\partial u/\partial x=\partial v/\partial x=P=0$ می‌باشند.

معادله‌ی حاکم بر غلظت گونه‌ها. در بررسی عملکرد اختلاطی ریزمجراها غلظت حاکم بر گونه‌ها توسط حل معادله‌ی (۱۷) به‌دست می‌آید.

$$\rho\left(u\frac{\partial C}{\partial x}+v\frac{\partial C}{\partial y}\right)=D\left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 C}{\partial y^2}\right) \quad (\text{۱۷})$$

که در آن C غلظت گونه‌های مورد نظر است. در حالت دوبعدی، شرایط مرزی مربوط به یک گونه با دو غلظت متفاوت در ورودی ریزمجرا، به‌صورت زیر اعمال می‌شود:

$$C(0,y)=\begin{cases}0, & 0<y<0.5H\\ 1, & 0.5H<y<H\end{cases} \qquad (۱۸)$$

هم‌چنین روی دیواره‌ها و در خروجی ریزمجرا، گرادیان غلظت در جهت عمود بر مرز صفر لحاظ شده است.

داده‌های ورودی. در کار حاضر، جنس ریزمجرا از سیلیکون فرض شده است و سیال عامل محلول آب با یون‌های K^+ و Cl^- است که غلظت مولار یون‌های محلول $C_0 = 10^{-2}\ \mathrm{kmol/m^3}$ می‌باشد؛ بنابراین غلظت عددی توده یون‌های محلول $n_0 = 6.022 \times 10^{21}\ \mathrm{ions/m^3}$ می‌باشد. سایر خواص ترموفیزیکی و ثابت‌های مورد استفاده در جدول (۱) ارائه شده است.

جدول ۱ خواص ترموفیزیکی و ثابت‌های مورد استفاده در پژوهش حاضر

پارامتر	مقادیر مورد استفاده [واحد]
ارتفاع ریزمجرا (H)	۱۰[μm]
زتا پتانسیل (ζ_0)	۵۰[mV]
بار الکترون (e)	$۱/۰۶\times۱۰^{-۱۹}$[C]
ثابت بولتزمن (k_b)	$۱/۳۸\times۱۰^{-۲۳}$[J/K]
ثابت گذردهی الکترولیت (ε_r)	۸۰
گذردهی الکتریکی خلأ (ε_0)	$۸/۸۵٤\times۱۰^{-۱۲}$ [C/V.m]
عدد والانس (z)	۱
لزجت دینامیکی (μ)	۱×۱۰^{-۳} [Pa.s]
چگالی (ρ)	۱۰۰۰ [kg/m^3]

روش حل عددی

برای حل عددی معادلات جریان از روش حجم محدود با متغیرهای هم‌مکان در شبکه‌ی غیریکنواخت استفاده شده است. طرح SIMPLE ارتباط میدان‌های سرعت و فشار را برقرار می‌کند و برای ممانعت از بروز احتمالی توزیع فشار شطرنجی، در محاسبه‌ی جرم عبوری در محل وجوه حجم‌های کنترل از طرح رای–چو استفاده شده است. ارزیابی توأم جملات پخش و جابه‌جایی در محل وجوه حجم‌های کنترل با استفاده از طرح هیبرید (Hybrid) انجام می‌شود.

محاسبات با حل معادله‌ی (۱) برای به‌دست آوردن توزیع پتانسیل الکتریکی خارجی اعمالی (ϕ) آغاز می‌شود. سپس پتانسیل الکتریکی درون ناحیه‌ی دوگانه‌ی الکتریکی (ψ) به غیر از دیواره‌ها که دارای زتا پتانسیل هستند، صفر لحاظ می‌گردد.

در ابتدا معادله‌ی (٦) یکبار با مقادیر اولیه‌ی n_0 برای n^+ و n^- حل می‌شود و توزیع (ψ) به‌دست می‌آید و سپس معادلات ارنست – پلانک (معادلات ۸–الف و ب) حل و توزیع غلظت‌های یونی حاصل می‌شوند. چگالی بار الکتریکی خالص (ρ_e) توسط معادله‌ی (۵) محاسبه می‌شود. در این صورت نیروی حجمی الکتریکی که عامل محرک سیال می‌باشد، به‌دست آمده است. در گام اول تکرارها، ابتدا یک میدان فشار اولیه‌ای فرض می‌شود و با این فرض، معادلات ناویر–استوکس اصلاح‌شده (معادلات ۱۱– الف و ب) برای یافتن میدان سرعت حل می‌شوند و سپس با حل معادله‌ی پیوستگی (معادله ۹) میدان‌های فشار و سرعت اصلاح می‌شوند. میدان جریان، توزیع چگالی بار الکتریکی خالص را تحت تأثیر قرار می‌دهد در نتیجه، در گام دوم مجدداً معادلات ارنست – پلانک برای یافتن توزیع غلظت‌های یونی حل می‌شوند. در ادامه معادلات (٦ و ۵) برای یافتن توزیع چگالی بار الکتریکی خالص و توزیع پتانسیل الکتریکی درون

لایه‌ی دوگانه‌ی الکتریکی حل می‌شوند. با استفاده از این دو توزیع، تکرارها تا زمان هم‌گرایی کامل ادامه پیدا می‌کند. شرط توقف هم‌گرایی نهایی، زمانی تعیین شده است که باقی‌مانده‌ی بی‌بعد تمامی معادلات به ۱×۱۰^{-۹} رسیده باشد. پس از همگرا شدن میدان سرعت، معادله‌ی (۱۷) برای مشخص شدن توزیع غلظت‌ها حل می‌شود.

برای اطمینان از صحت حل عددی نتایج عددی با نتایج حل تحلیلی یک جریان الکترواسمتیک ایده‌آل بین صفحات تخت مقایسه شده است. معادلات (۲۰ و ۱۹) حل تحلیلی موجود برای توزیع سرعت، پتانسیل الکتریکی و غلظت یون‌های مثبت و منفی را نشان می‌دهند [13].

$$\frac{w}{U_{ref}} = 1 - \frac{cosh(\kappa(y/D_h - 1/4))}{\cosh(\kappa)} \quad (۱۹)$$

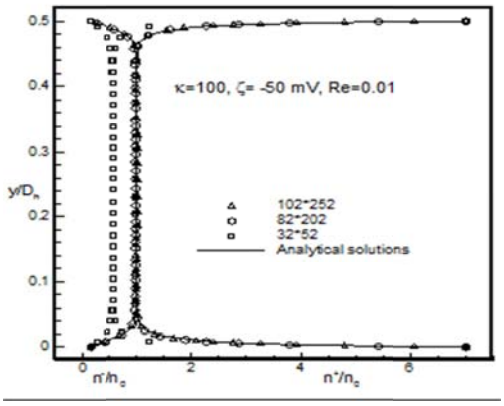
$$\frac{n^{\pm}}{n_0} = \exp(\mp\psi/(k_b T/ze)) \quad (۲۰)$$

مطالعه‌ی اندازه‌ی شبکه برای $\kappa =۱۰۰$، $\zeta_0 =-۵۰\ mV$ و $Re =۰/۰۱$ نشان می‌دهد که حداقل تعداد گره‌ها در راستای عرض و طول ریزمجرا باید ۲۰۲×۸۲ باشد. شکل (۲) نشان می‌دهد برای شبکه‌ی ۲۵۲×۱۰۲ نتایج حل عددی با دقت بسیار بالایی با حل تحلیلی مطابقت دارند.

حل تحلیلی دبی حجمی از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید [13]:

$$M = \frac{\dot{m}}{\rho U_{ref} H} = 1 - \frac{\tanh(\kappa/4)}{\kappa/4} \quad (۲۱)$$

برای شبکه‌ی ۵۲×۳۲ دبی حجمی عددی بی‌بعد ۰/۷۷۷۶ به‌دست آمده است و برای شبکه‌های ۲۰۲×۸۲ و ۲۵۲×۱۰۲، به‌ترتیب ۰/۹۵۵۸ و ۰/۹۵۸۹ به‌دست آمده است و این در حالی است که پاسخ حل تحلیلی مطابق معادله‌ی (۲۲)، ۰/۹۶۰۰می‌باشد. در نتیجه برای $\zeta = \zeta_0$ انتخاب شبکه‌ای حدود ۲۵۲×۱۰۲، شبکه‌ای مناسب است. لازم به ذکر است این تعداد گره در شبکه متناسب با نوع مسأله متفاوت می‌باشد، به‌عنوان مثال برای ریزمخلوط‌گر غیرفعال تعداد گره‌های مناسب ۵۰۲×۱۰۲ می‌باشند.



شکل ۲ اثرات اندازه‌ی شبکه در توزیع غلظت یون‌های مثبت (n^{+}) و یون‌های منفی (n^{-}) جریان الکترواسمتیک ایده‌آل با $\kappa =۱۰۰$، $\zeta = -۵۰\ mV$، $Re =۰/۰۱$

شکل (۳) مقایسه نتایج عددی و حل تحلیلی توزیع سرعت و غلظت یون‌های مثبت و منفی را برای $\kappa =۳۲$ و $\kappa =۱۰۰$ نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود که نتایج عددی و حل تحلیلی تطبیق خیلی خوبی دارند.

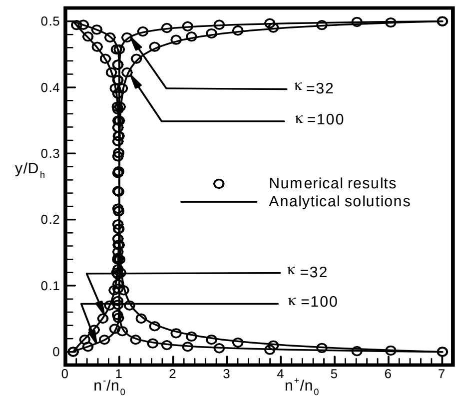
نتایج

مطابق نیمه‌ی پایانی شکل (۱)، جریان الکترواسمتیک مورد نظر در این مقاله، درون یک ریزمجرای تخت توسط دو تکه بار ناهمگن سطحی با بار منفی و شدت ζ_0 برقرار شده است. میدان الکتریکی اعمالی $۲۰\,{}^{V}/_{mm}$ در نظر گرفته شده است و عدد رینولدز متناسب با این میدان ۰/۰۰۷ است.

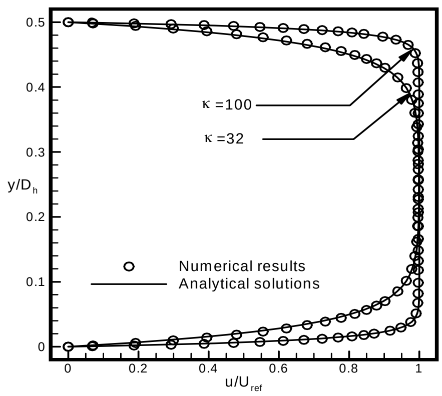
مطالعه‌ی راندمان اختلاط ریزمخلوط‌گرهای غیرفعال.

در این قسمت به مطالعه‌ی راندمان اختلاط نمونه‌های مختلف ریزمخلوط‌گر غیرفعال پرداخته خواهد شد و

اثرات چیدمان‌ها و بارهای تکه‌ای ناهمگن مختلف بررسی خواهد شد.



الف)توزیع غلظت یون‌های مثبت (n^+) و یون‌های منفی (n^-)



ب) توزیع سرعت

شکل ۳ جریان الکترواسمتیک ایده‌آل با Re =۰/۰۱،
κ =۱۰۰، ζ = -۵۰ mV.

مطالعات نشان می‌دهد که تعریف راندمان اختلاط با استفاده از میانگین وزن‌دار انحراف از معیار غلظت، σ_w، نتایج قابل قبولی ارائه می‌دهد. لذا راندمان اختلاط، ε_m، در هر مقطع عرضی از ریزمجرا به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

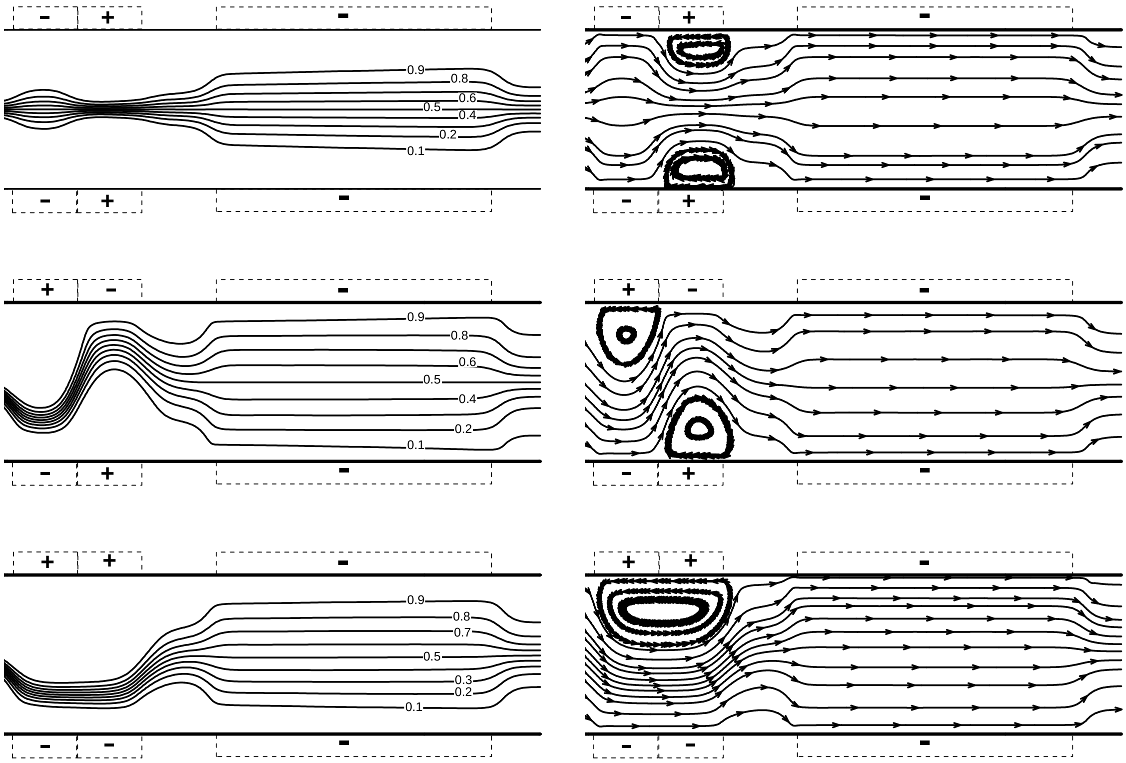
$$\varepsilon_m = \frac{1 - 2\sigma_w}{1 - 2\sigma_{w,min}} \quad (۲۳)$$

که در آن $\sigma_{w,min}$ یک مقدار مرجع است و در صورتی که اختلاط کامل به‌وجود آید، مقدار آن به حداقل خود یعنی صفر می‌رسد و مخرج کسر معادله‌ی (۱۹) برابر با ۱ می‌شود. همچنین σ_w به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\sigma_w = \frac{\int_0^H u(y)(C(x,y) - C_m)^2 dy}{\int_0^H u(y)} \quad (۲٤)$$

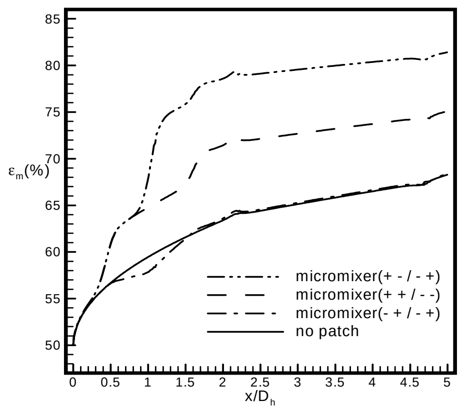
که در آن توزیع عرضی سرعت $u(y)$، به‌عنوان تابع وزن‌دهنده در تعریف میانگین وزنی استفاده شده است. $C(x,y)$ میزان غلظت در هر نقطه از میدان جریان و C_m مقدار متوسط آن در مقطع می‌باشد.

شکل (٤-الف) خطوط جریان سه چیدمان $(-+/+-)$، $(+-/-+)$ و $(+-/--+)$ بارهای ناهمگن را نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود که استفاده از بارهای تکه‌ای در نیمه‌ی اول ریزمخلوط‌گر موجب ایجاد آشوبناکی در جریان می‌شود و متناسب با نحوه‌ی این چیدمان می‌توان شکل گردابه‌ی ایجاد شده را تغییر داد. با توجه به جهت قرارگیری میدان الکتریکی خارجی، بارهای تکه‌ای مثبت موجب حرکت جریان بر خلاف جهت اصلی جریان درون ریزمجرا می‌شوند. مشاهده می‌شود که در حالت $(+-/--+)$ به‌علت قرارگیری دو بار هم علامت مثبت مجاور هم، گردابه‌ای بزرگ تشکیل شده است. خطوط جریان در ناحیه‌ی ریزپمپ الکترواسمتیک در هر سه چیدمان موازی می‌باشند. شکل (٤-ب) خطوط همتراز غلظت این سه ریزمخلوط‌گر را نشان داده است. مشاهده می‌شود آشوبناکی ایجاد شده به علت گردابه‌های شکل گرفته در اثر وجود این بارهای ناهمگن، میزان اختلاط را افزایش می‌دهد و متناسب با نوع چیدمان میزان اختلاط نهایی متفاوت خواهد بود. می‌توان به‌صورت کیفی بیان نمود که در ترکیب $(-+/-+)$ کمترین میزان اختلاط رخ داده است زیرا گونه‌ها در خروجی نفوذ زیادی در یکدیگر نداشته‌اند. برای بررسی کمی و دقیق میزان راندمان ریزمخلوط‌گرها با چیدمان‌های مختلف از رابطه‌ی (۲۳) بهره گرفته شده است.



(ب) خطوط همتراز غلظت　　　　(الف) خطوط جریان

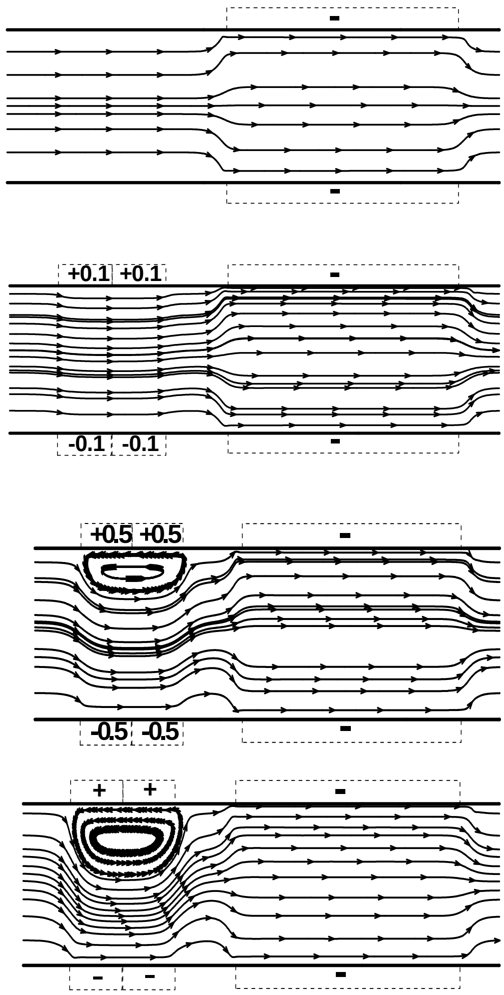
شکل ٤ الف) خطوط جریان و ب) خطوط همتراز غلظت ریزمخلوط‌گرهای (+−/+ −)، (+−/− +) و (−−/+ +) با
κ =۱۰۰ و Re =۰/۰۰۷



شکل ۵ تغییرات راندمان اختلاط در طول ریزمجرا برای آرایش‌های متفاوت تکه‌های ناهمگنی بار

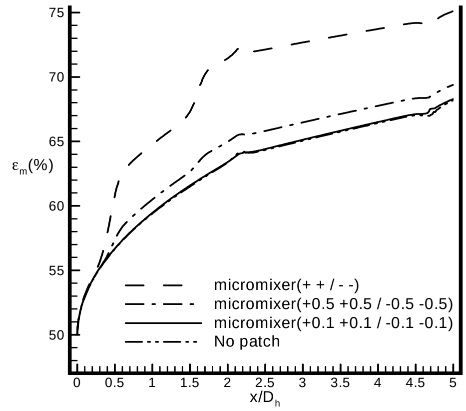
در شکل (۵) رانـدمان اخـتلاط سـه آرایـش (+−/+ −)، (+−/− +) و (−−/+ +) بارهای تکه‌ای نشان داده شده است. در تمامی موارد به‌استثنای ناحیه‌ای در چیدمان (+−/+ −)، مشاهده می‌شود که با پیشروی جریان در طول ریزمجـرا رانـدمان اخـتلاط افزایش می‌یابد و این میزان از راندمان ریزمجرای بدون بارهای تکه‌ای (No patch) بیشتر است و هم‌چنـین تـا قبل از رسیدن به بارهای نـاهمگن، عملکـرد اختلاطـی ریزمجرای بدون بار با ریزمجـرای دارای بـار نـاهمگن یکسان است اما مشاهده می‌شـود کـه در ناحیـه‌ی ایـن بارها به‌علت وجود جریان‌های چرخشی قدرتمندی که وجود دارد میزان راندمان اختلاط بـه‌نحـو چشـمگیری افزایش می‌یابد. ناحیـه‌ی ریزپمـپ الکترواسـمتیک کـه عامل محرک جریان در این ریزمخلوط‌گرها است، اثری یکسان بر راندمان اختلاط دارد و مشاهده مـی‌شـود در ایـن ناحیـه خطـوط رانـدمان اخـتلاط تقریبـاً مـوازی یکدیگر می‌باشند. علـت کـاهش رانـدمان اخـتلاط در ناحیـه‌ی اولیـه چیـدمان (+−/+ −)، بـه نحـوه‌ی قرارگیری بارهای ناهمگن برمی‌گردد زیرا این چیـدمان به گونـه‌ای اسـت کـه خطـوط جریـان از هـم فاصـله

می‌گیرند و در نتیجه امکان اختلاط گونه‌ها کاهش می‌یابد. این موضوع مطابق شکل (٤-الف) در خطوط جریان این ریزمخلوط‌گر کاملاً مشهود است. مطالعات انجام شده نشان داد که در تمامی شدت‌های مختلف بارهای ناهمگن میزان راندمان آرایش (+−/− +) بیشترین راندمان اختلاط را دارا می‌باشد. در این وضعیت، آرایش تکه‌های ناهمگنی بار، کاملاً نامتقارن است. هرچه این عدم تقارن بیشتر باشد، میزان راندمان اختلاط افزایش می‌یابد. لذا بدترین عملکرد مربوط به آرایشی است که بیشترین تقارن را در الگوی بار دارد و بهترین عملکرد اختلاط مربوط به آرایشی است که کمترین تقارن را در الگوی بار دارد.



شکل ٦ خطوط جریان ریزمجرای بدون بار تکه‌ای و ریزمخلوط‌گر (−−/+ +) با سه شدت 0.1ζ، 0.5ζ و ζ

به‌منظور بررسی اثر شدت بارهای ناهمگن، خطوط جریان و راندمان اختلاط برای آرایش (−−/+ +) و سه شدت 0.1ζ، 0.5ζ و ζ در شکل (٧ و ٦) نشان داده شده است. در شکل (٦) مشاهده می‌شود در وضعیت بدون بار خطوط جریان کاملاً موازی می‌باشند. با قرار دادن بارهای ناهمگن با شدت 0.1ζ صرفاً کمی خطوط جریان جابه‌جا شده‌اند و گردابه‌ای شکل نگرفته است. با افزایش میزان شدت بارهای ناهمگن درون الکترولیت گردابه ایجاد می‌شود. می‌توان گفت زمانی که مقدار بارهای ناهمگن کم باشد گردابه‌ها توسط جریانی که ریزپمپ الکترواسمتیک به حرکت در آورده است مستهلک می‌شوند. در شکل (٧) راندمان این آرایش‌ها نشان داده شده‌اند.

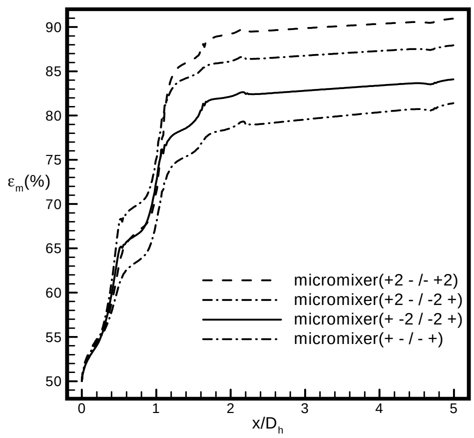


شکل ٧ تغییرات راندمان اختلاط در طول ریزمجرا برای آرایش (+−/− +) با سه شدت 0.1ζ، 0.5ζ و ζ

مشاهده می‌شود افزایش شدت بارهای ناهمگن موجب افزایش راندمان اختلاط شده است. در وضعیت 0.1ζ به‌علت این‌که هیچ‌گونه گردابه‌ای در جریان پدید نیامده است، راندمان اختلاط تفاوت بسیار ناچیزی با وضعیت ریزمجرای بدون بار دارد. می‌توان گفت هر اندازه که شدت بارهای ناهمگن، با فرض ثابت بودن قدرت ریزپمپ الکترواسمتیک، افزایش یابد، عملکرد ریزمخلوط‌گر بهتر خواهد شد.

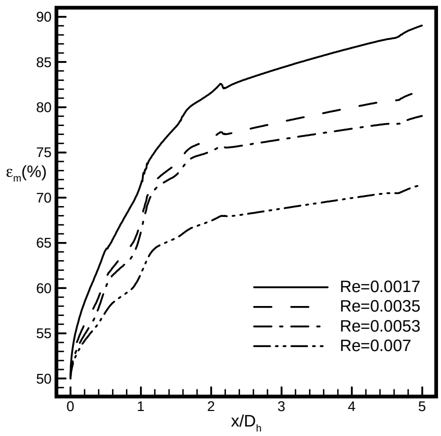
برای بررسی اثر میزان عدم تقارن بارهای ناهمگن

در رانــدمان اخــتلاط در شــکل (۸) بــرای آرایــش (+−/− +) بـا دوبرابـر کـردن قـدرت دو تکـه بـار ناهمگن آرایش‌های (+2−/− 2+)، (2 + −/− 2+) و (+2−/2 − +) بررسی شده‌اند. مشـاهده مـی‌شـود زمانی که تعداد بارهای تکه‌ای مثبت افـزایش مـی‌یابـد میزان رانـدمان اخـتلاط بهبـود مـی‌یابـد. بـا مقایسـه‌ی رانــدمان آرایــش (+2−/− 2+) و (2 + −/− 2+) مشــخص مــی‌شــود شــدت بارهــای مثبــت در ایــن ریزمخلوط‌گر با توجه به جهت اعمـال میـدان پتانسـیل الکتریکــی خــارجی عامــل تأثیرگــذارتری نســبت بــه نامتقارنی در افزایش راندمان اختلاط می‌باشند. می‌توان گفت وجـود، بارهـای نـاهمگن مثبـت موجـب ایجـاد گردابه‌ها می‌شـود و افـزایش تعـداد آن‌هـا یـا افـزایش قدرت آن‌ها موجب افزایش تعداد یا قدرت گردابـه‌هـا می‌شود و متناسب با این پدیده میزان رانـدمان اخـتلاط بهبود خواهد یافت.



شکل ۸ تغییرات راندمان اختلاط در طول ریزمجرا به‌ازای مقادیر مختلف بار روی تکه‌های ناهمگنی

در شــکل (۹) اثـر افـزایش عـدد رینولـدز روی عملکرد ریزمخلوط‌گر (+−/− +) بررسی شده است. افزایش ایـن عـدد ناشـی از افـزایش میـدان الکتریکـی خارجی می‌باشد. مشـاهده مـی‌شـود بـا افـزایش عـدد رینولدز، راندمان اختلاط کاهش یافتـه اسـت در حـالی که شدت بارهای تکه‌ای ناهمگن، زتاپتانسـیل اسـت و ثابت می‌باشد. افزایش عدد رینولـدز موجـب مـی‌شـود سیال با سرعت بیشتری درون ریزمجرا به‌حرکت درآید و همین امر موجب کاهش قـدرت گردابـه‌هـای ایجـاد شده به‌وسیله‌ی بارهای ناهمگن می‌شود. کاهش قدرت گردابــه‌هــا کــه عامــل اصــلی افــزایش اخــتلاط در ریزمخلوط‌گر غیرفعال هستند، کاهش راندمان اخـتلاط را در پی دارد.



شکل۹ تغییرات راندمان اختلاط در طول ریزمجرا برای آرایش (+−/− +) با افزایش عدد رینولدز

نتیجه‌گیری

در ایــن مقالــه چگــونگی فرآینــد اخــتلاط در ریزمخلوط‌گرهای غیرفعال با بار الکتریکی نـاهمگن در دیـواره، رانـده شـده توسـط جریـان الکترواسـمتیک به‌صورت کمی و کیفی بررسی شـده اسـت. مطالعـات نشان داد بـا انتخـاب آرایـش مناسـب بارهـای تکـه‌ای ناهمگن، مـی‌تـوان ریزمخلـوط‌گـر الکترواسـمتیکی بـا اختلاط قابل کنترل تولید نمود. مشاهده شد کـه رفتـار چنین ریزمخلوط‌گرهایی تحت تأثیر نحوه‌ی آرایش بار الکتریکی ناهمگن و شـدت میـدان الکتریکـی اعمـالی می‌باشد. نتایج نشان داد در صورت ثابت بـودن شـدت بارهای ناهمگن الکتریکی، بیشترین رانـدمان اختلاطـی مربوط به آرایشی است که عـدم تقـارن بیشـتری دارد.

هم‌چنین هر چقدر شدت بارهای ناهمگن به‌صورت یکسان افزایش یابد میزان اختلاط نیز افزایش خواهد یافت. افزایش میدان الکتریکی خارجی که منجر به افزایش عدد رینولدز می‌شود، موجب کاهش گردابه‌های ایجادشده می‌شوند و راندمان اختلاط را کاهش می‌دهند.

فهرست علائم

عدد والانس یون‌های مثبت و منفی	z
بار الکترون [C]	e
شدت میدان الکتریکی اعمالی $[V/m]$	E
نیروی حجمی $[N/m^3]$	f_z
ثابت بولتزمن $[J/K]$	k_B
غلظت یونی محلول $[ions/m^3]$	n_0
پارامتر دیبای – هوکل	K
عدد آووگادرو	N_a
دما[K]	T
سرعت هلموهلتز - اسمولوکفسکی$[m/s]$	U_{ref}
ارتفاع ریزمجرا [m]	H
طول ریزمجرا [m]	L
سرعت بی‌بعد و بعددار	w, W
مختصات کارتزین [m]	x, y, z
غلظت یون‌های مثبت	n^+
غلظت یون‌های منفی	n^-
عدد رینولدز	Re
عدد اشمیت	Sc
غلظت گونه	C

علائم یونانی

راندمان اختلاط	ε_m
ضریب لزجت دینامیکی [Pa.s]	μ
چگالی سیال $[kg/m^3]$	ρ
ثابت دی‌الکتریک محلول الکترولیت	ε_r
ضریب گذردهی خلأ $[C/V.m]$	ε_0
پتانسیل زتا [V]	ζ
چگالی خالص بار الکتریکی $[C/m^3]$	ρ_e
پتانسیل الکتریکی درون لایه‌ی دوگانه‌ی الکتریکی [V]	ψ
عدد ای‌دی‌ال$[1/m]$	κ
پتانسیل الکتریکی خارجی [V]	ϕ
پتانسیل الکتریکی خارجی (قطب آند) [V]	ϕ_1
پتانسیل الکتریکی خارجی (قطب کاتد) [V]	ϕ_2

مراجع

1. Wang, M., Wang, J.K. , Chen, S.Y. and Pan, N., "Electrokinetic pumping effects of charged porous media in microchannels using the lattice Poisson–Boltzmann method", *J. Colloid Inter f. Sci. No. 304*, pp. 246–253, (2006).
2. Bhattacharyya, S. and Nayak, A.K., "Electroosmotic flow in micro/nanochannels with surface potential heterogeneity: An analysis through the Nernst–Planck model with convection effect", *Colloids and Surfaces A: Physicochem. Eng.*, No. 339, pp. 167–177, (2009).
3. Chang, C.C. and Yang, R-J "Electrokinetic mixing in microfluidic systems", Microfluid Nanofluid, No. 3, pp. 501–525, (2007).
4. Kamholz, A.E., Weigl, B.H., Finlayson, B.A. and Yager P., "Quantitative analysis of molecular

interactive in microfluidic channel: the Tsensor", *Anal Chem.*, No. 71, pp. 5340–5347, (1999).

5. Ismagilov, R.F., Stroock, A.D., Kenis P.J.A, Whitesides, G.M. and Stone, H.A., "Experimental and theoretical scaling laws for transverse diffusive broadening in two-phase laminar flow in microchannels", *Appl. Phys. Lett.*, No. 76, pp. 2376–2378, (2000).
6. Anderson, J.L., Idol, W.K., "Electroosmosisthrough pores with nonuniformly charged walls", *Chem . Eng. Commun.*, No. 38, pp. 93–106, (1985).
7. Ajdari, A., "Electro-osmosis on inhomogeneous charged surfaces", *Phys Rev Lett*, No. 75, pp. 755–758, (1995).
8. Stroock, A.D., Dertinger, S., K.W., Ajdari, A., Mezic, I., Stone, H.A. and Whitesides, G.M., "Chaotic mixer for microchannels", *Science*, No. 295, pp. 647–65, (2002).
9. Fushinobu, K. and Nakata, M., "An experimental and numerical study of a liquid mixing device for Microsystems", *Trans ASME J Electronic Packaging*, No. 127, pp. 141–146, (2005).
10. Wang, J.K., Wang, M. and Li, Z.X., "Lattice Boltzmann simulations of mixing enhancement by the electroosmotic flow in microchannels", *Mod. Phys. Lett. B*, No. 19, pp. 1515–1518, (2005).
11. Tang, GH. , Li, Z., Wang, J.K. , He, Y.L. , Tao, W.Q., "Electroosmotic flow mixing in microchannels with the lattice Boltzmann Method", *J Appl Phys*, No. 100, 094908, (2006).
12. Tang, Z., Hong, S., Djukic, D., Modi, V., West, AC., Yardley, J. and Osgood, R.M., "Electrokinetic flow control for composition modulation in a microchannel", *J Micromech Microeng*, No. 12, pp. 870–877, (2002).
13. Mirbozorgi, S.A., Niazmand, H. and Renksizbulut, M., "Electro-osmotic flow in reservoir-connected flat microchannels with non-uniform zeta potential", *J. Fluid Engineering*, No. 128, pp. 1133-1143, (2006).